

# **El modelo neoclásico de crecimiento**

**Macroeconomía avanzada**

**ITAM, Otoño 2026**

**Semanas 3-4**

Jorge Alonso Ortiz

## Introducción

---

Los datos de contabilidad nacional de las economías más avanzadas muestran regularidades de largo plazo. El modelo neoclásico de crecimiento es el marco básico para organizarlas, y sus resultados fundamentales permiten:

- Mostrar cómo es compatible con las observaciones de contabilidad nacional
- Repasar la equivalencia entre la solución socialmente óptima y la competitiva
- Introducir las técnicas de solución básicas de modelos dinámicos
  - Programación dinámica
  - Log-linealización
- Mostrar cómo resolver modelos dinámicos sin incertidumbre en **Dynare**

## Planificador y mercado dan la misma asignación, y los parámetros fijan el largo plazo

---

- El modelo dinámico con capital y el problema de planificación social
- Equivalencias: equilibrio competitivo secuencial y sus descentralizaciones
- Largo plazo: estado estacionario y senda de crecimiento balanceado
- Cierre: laboratorio — participaciones por país (¿SCB o transición?) y mini-proyectos GHK/KORV

# Un modelo dinámico con capital

---

## Tecnología de Producción

Existe un único bien final  $Y_t$  que se produce combinando capital predeterminado  $K_{t-1}$  y trabajo contemporáneo  $L_t$ :

$$Y_t = A_t K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

- $\alpha \in (0, 1)$ : elasticidad producto del capital (participación factorial bajo competencia).
- $A_t$ : nivel de productividad total de los factores.

## Acumulación y Factibilidad

**Ley de acumulación de capital:** el acervo se desgasta a tasa  $\delta \in (0, 1)$  y se renueva vía inversión  $I_t$ :

$$K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + I_t$$

**Restricción de factibilidad:** el producto se reparte entre consumo  $C_t$  e inversión:

$$C_t + I_t = Y_t$$

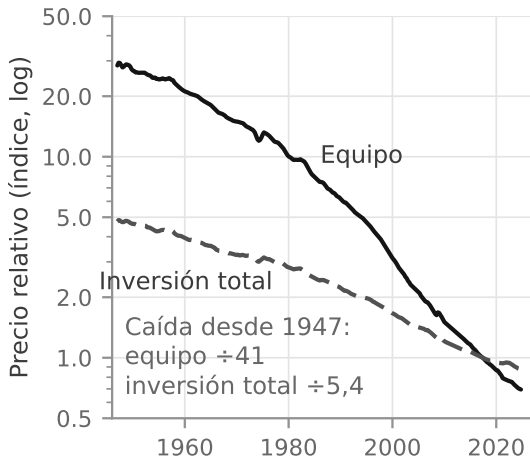
## El supuesto que los datos mataron

La restricción  $C_t + I_t = Y_t$  implica que el **precio relativo de la inversión** es igual a 1 en todos los periodos: una unidad de producto se transforma 1 : 1 en consumo o en inversión.

**Contraste empírico:** el precio relativo de la inversión cae sostenidamente desde 1947. Con el ajuste por calidad de Gordon y Cummins-Violante (DiCecio 2009), el **equipo** (PERIC) cae por un factor  $\approx 41$  ( $\approx 4.8\%$  anual) y la **inversión total** (PIRIC) por un factor  $\approx 5.4$  ( $\approx 2.2\%$  anual). La serie cruda  $GPDICTPI/PCECTPI$ , sin ajuste de calidad, cae mucho menos.

```
from puremacro import fetch
p_rel = fetch.fetch_fred('PERIC') # equipo, ajustada
# cf. GPDICTPI/PCECTPI (crudo, sin calidad)
```

*La muerte empírica del precio relativo unitario motiva la SCB de dos velocidades (GHK) y el debate  $\Delta A$  vs  $\Delta Q$ .*



## El problema de planificación social

---

En esta economía se cumplen los teoremas fundamentales de la economía del bienestar, por lo que podemos escribir el problema de **planificación social**:

$$\max_{C_t, L_t, K_t} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \{ \log(C_t) + \gamma \log(N_t - L_t) \}$$

sujeito a:

$$C_t + K_t - (1 - \delta)K_{t-1} = A_t K_{t-1}^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

y debería arrojar las mismas condiciones de eficiencia y factibilidad que el problema descentralizado.

# El planificador iguala márgenes intra e intertemporales

---

## Eficiencia intratemporal:

$$\frac{\gamma C_t^*}{N_t - L_t^*} = (1 - \alpha) \frac{Y_t^*}{L_t^*}$$

## Ecuación de Euler:

$$\frac{C_{t+1}^*}{\beta C_t^*} = \alpha \frac{Y_{t+1}^*}{K_t^*} + 1 - \delta$$

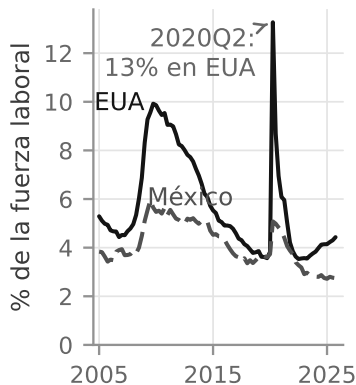
## Factibilidad:

$$C_t^* + K_t^* - (1 - \delta)K_{t-1}^* = Y_t^*$$

La solución de los problemas de planificación social suele ser más sencilla en los contextos donde se cumplen los teoremas fundamentales de la economía del bienestar, pero el problema admite diferentes tipos de descentralización:

- Equilibrio competitivo secuencial
- Equilibrio competitivo Arrow-Debreu
- Equilibrio competitivo recursivo

## Debate: ¿dónde está el desempleo en la condición intratemporal?



```
from puremacro import fetch
lfs = fetch.fetch_ilstat_lfs_panel(countries=['MEX','USA'], sexes=('_T',),
                                   ages=('_Y_GE15',), frequency='Q', adjustment='SA')
u = 100*lfs['urate'] # fraccion -> %; MEX sale vacio: la figura usa FRED
```

Fuente: FRED, tasa de desempleo trimestral de EUA y México. (Chari, Kehoe y McGrattan 2007; Shimer 2009; Karabarbounis 2014)

$$\frac{\gamma C_t}{N_t - L_t} = (1 - \alpha) \frac{Y_t}{L_t}$$

Esta condición vacía el mercado de trabajo **por construcción**: al salario vigente, todo el que quiere trabajar, trabaja.

- ¿Qué es una recesión para este modelo?
- Si medimos el lado del hogar y el de la empresa por separado, ¿coinciden?

*La brecha entre ambos lados de esta condición —todavía sin nombre— reaparecerá en el curso como **Business Cycle Accounting**.*

## Equilibrio competitivo secuencial

---

Un ECS es una lista de secuencias de cantidades  $C_t, B_t, I_t, K_{st-1}, K_{dt-1}, L_{st}, L_{dt}$ , y precios  $w_t, q_t, r_{t-1}$  tales que:

1. Dadas las secuencias de precios  $w_t, q_t$  y  $r_{t-1}$ ,  $C_t, I_t, K_{st-1}$  y  $L_{st}$  son solución del problema del hogar
2. Dadas las secuencias de precios  $w_t, q_t$  y  $r_{t-1}$ ,  $K_{dt-1}$  y  $L_{dt}$  son solución del problema de la empresa representativa
3. Dadas las secuencias de precios  $w_t, q_t$  y  $r_{t-1}$ , los mercados de trabajo, capital, producto y bonos están en equilibrio

## Problema del hogar representativo

---

$$\max_{C_t, L_{st}, K_{st}, B_t} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \{ \log(C_t) + \gamma \log(N_t - L_{st}) \}$$

sujeito a:

$$C_t + K_{st} - (1 - \delta)K_{st-1} + B_t = q_t K_{st-1} + w_t L_{st} + (1 + r_{t-1})B_{t-1}$$

Construyendo su lagrangiano  $\mathcal{L}(C_t, L_{st}, K_{st}, B_t, \lambda_t)$  y tomando condiciones de primer orden obtenemos las condiciones de eficiencia y factibilidad que caracterizan el comportamiento del hogar.

## La empresa iguala precios de factores y productos marginales

---

La empresa de la que el hogar es propietario maximiza el flujo de dividendos

$$\max_{K_{dt-1}, L_{dt}} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{A_t K_{dt-1}^{\alpha} L_{dt}^{1-\alpha} - q_t K_{dt-1} - w_t L_{dt}}{(1+r_1) \dots (1+r_{t-1})}$$

obteniendo una condición de eficiencia para la demanda de capital

$$q_t = \alpha A_t (K_{dt-1}^*)^{\alpha-1} (L_{dt}^*)^{1-\alpha} = \alpha \frac{Y_t^*}{K_{dt-1}^*}$$

y otra para la demanda de trabajo

$$w_t = (1-\alpha) A_t (K_{dt-1}^*)^{\alpha} (L_{dt}^*)^{-\alpha} = (1-\alpha) \frac{Y_t^*}{L_{dt}^*}$$

condiciones que combinaremos con el comportamiento eficiente del hogar

## El equilibrio secuencial replica la solución del planificador

### Planificador Social (Óptimo)

#### Eficiencia intratemporal:

$$\frac{\gamma C_t^*}{N_t - L_t^*} = (1 - \alpha) \frac{Y_t^*}{L_t^*}$$

#### Ecuación de Euler para el capital:

$$\frac{C_{t+1}^*}{\beta C_t^*} = \alpha \frac{Y_{t+1}^*}{K_t^*} + 1 - \delta$$

### Economía Descentralizada (Mercado)

#### Eficiencia intratemporal y salario:

$$\frac{\gamma C_t^*}{N_t - L_{st}^*} = w_t = (1 - \alpha) \frac{Y_t^*}{L_{dt}^*}$$

#### No arbitraje y Euler de mercado:

$$\frac{C_{t+1}^*}{\beta C_t^*} = q_{t+1} + 1 - \delta = \alpha \frac{Y_{t+1}^*}{K_{dt}^*} + 1 - \delta$$

### Primer Teorema del Bienestar: Equivalencia Asignativa

Con vaciado de mercado en trabajo ( $L_{dt}^* = L_{st}^* = L_t^*$ ), capital ( $K_{dt-1}^* = K_{st-1}^* = K_{t-1}^*$ ) y factibilidad agregada:

$$C_t^* + K_t^* - (1 - \delta)K_{t-1}^* = Y_t^*$$

la solución secuencial descentralizada coincide con la del planificador para todo  $t \geq 1$ , incluyendo  $t \rightarrow \infty$ .

## Equilibrios a largo plazo

---

El modelo produce dos tipos de comportamiento a largo plazo para cualquier  $K_0 > 0$ :

- Si  $A_t = A$  y  $N_t = N$  para casi todo  $t$ , surge el concepto de **estado estacionario** (ss)
- Si  $A_{t+1} = (1 + \hat{A})A_t$  y  $N_{t+1} = (1 + \hat{N})N_t$ , surge el concepto de **senda de crecimiento balanceado** (SCB)
- El concepto de **SCB** es más restrictivo para las preferencias y la naturaleza del progreso tecnológico

## Estado estacionario

---

### Condiciones de Estado Estacionario

#### Eficiencia intratemporal y oferta laboral:

$$\frac{\gamma C_{ss}}{N - L_{ss}} = (1 - \alpha) \frac{Y_{ss}}{L_{ss}} \implies L_{ss} = \frac{(1 - \alpha)N}{1 - \alpha + \gamma(1 - S_{ss})}$$

#### Tasa de inversión/ahorro estacionaria ( $I_{ss} = \delta K_{ss}$ ):

$$S_{ss} = \frac{\delta K_{ss}}{Y_{ss}}$$

#### Intensidad de capital (ecuación de Euler):

$$\frac{K_{ss}}{Y_{ss}} = \frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}$$

## El largo plazo queda determinado por los parámetros

Sustituyendo  $S_{ss} = \delta K_{ss}/Y_{ss}$  obtenemos las soluciones analíticas de largo plazo:

### Trabajo Estacionario ( $L_{ss}$ )

$$L_{ss} = \frac{(1 - \alpha)N}{1 - \alpha + \gamma \left(1 - \frac{\alpha\delta}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}\right)}$$

- Depende solo de preferencias y tecnología ( $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ ) y escala con  $N$ .
- **Invariante a la PTF ( $A$ ):** el efecto sustitución y el efecto ingreso sobre las horas se cancelan exactamente.

### Capital Estacionario ( $K_{ss}$ )

De la función de producción y la Euler:

$$\frac{K_{ss}}{AK_{ss}^{\alpha}L_{ss}^{1-\alpha}} = \frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta}$$

$$K_{ss} = \left( \frac{\alpha A}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{ss}$$

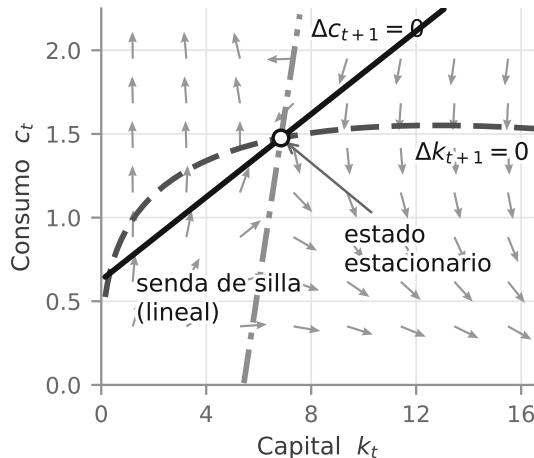
- Lineal en las horas estacionarias  $L_{ss}$ .
- Escala con  $A^{\frac{1}{1-\alpha}}$  (progreso técnico aumentador de trabajo).

## Diagrama de fases en tiempo discreto

### Lugares geométricos en tiempo discreto

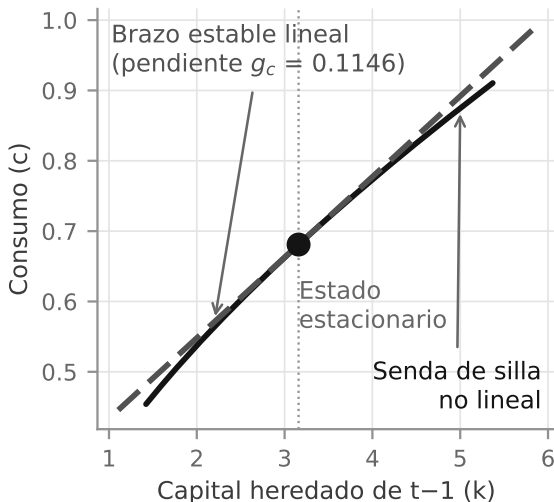
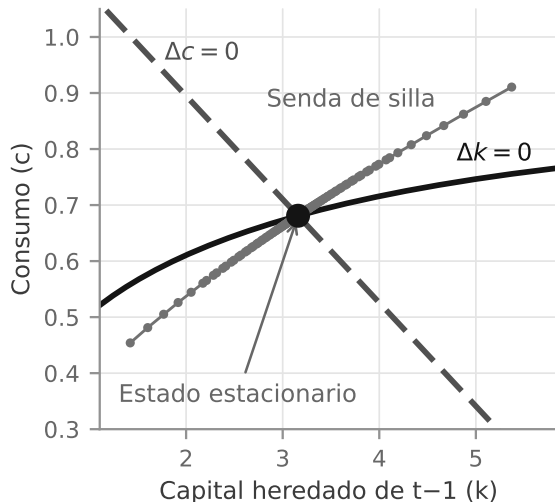
- **Lugar geométrico**  $\Delta k_{t+1} = k_{t+1} - k_t = 0$ : Exige  $c_t = f(k_t) - \delta k_t$  (curva jorobada). Por debajo de la curva ( $c_t$  bajo),  $k_{t+1} > k_t$ : el capital crece.
- **Lugar geométrico**  $\Delta c_{t+1} = c_{t+1} - c_t = 0$ : De Euler  $u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta]$ ,  $c_{t+1} = c_t \implies k_{t+1} = k_{ss}$ . En la restricción de recursos:

$$c_t = f(k_t) + (1 - \delta)k_t - k_{ss}$$



Las flechas dan la dirección del movimiento; la senda dibujada es la aproximación lineal al brazo estable.

## El brazo estable: lineal cerca del estado estacionario, no lineal lejos



A la izquierda, los dos lugares geométricos y la senda de silla que pasa por el estado estacionario. A la derecha, la misma senda contra su aproximación lineal (pendiente  $g_c = 0.1146$ , calibración anual): coinciden cerca de  $k_{ss}$  y se separan lejos de él —resolver el modelo localmente no es resolverlo global—.

## Senda de crecimiento balanceado

---

Una **SCB** es una situación en la que todas las variables endógenas de una economía crecen a tasas constantes. En la versión más sencilla del modelo neoclásico,  $Y$ ,  $C$ ,  $K$  e  $I$  crecen a la misma tasa  $g$ , mientras que el trabajo crece con la población ( $\hat{N}$ ) y el salario a  $(1 + g)/(1 + \hat{N})$ : por eso los cocientes  $C/Y$  e  $I/Y$  son constantes. Y hay contextos de crecimiento tecnológico no neutral en los que esas tasas constantes difieren entre grupos de variables.

**Paso 1.** Calculamos la tasa a la que debe crecer el PIB del modelo

$$1 + \hat{Y}_{t+1} = (1 + \hat{A}_{t+1})(1 + \hat{K}_t)^\alpha (1 + \hat{L}_{t+1})^{1-\alpha}$$

que implica una tasa de crecimiento en la senda de crecimiento balanceado de

$$1 + g = (1 + \hat{A})^{\frac{1}{1-\alpha}} (1 + \hat{N})$$

## Ejercicio: ¿qué países viven en su SCB?

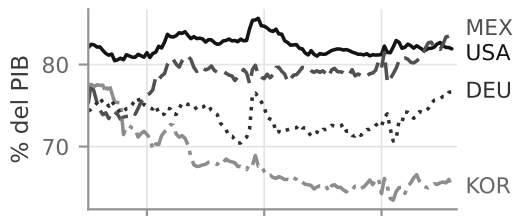
Calculen las participaciones reales  $C/Y$  e  $I/Y$  para México, EUA, Corea y Alemania: EUA es razonablemente estacionario, Corea está en transición y México tiene su propia historia. **SCB vs dinámica de transición**, hecho tangible con datos.

```
import numpy as np, pandas as pd
qna = pd.read_csv('data_curso/oecd_qna_scb.csv', parse_dates=['date'])
# formato LARGO (code, date, variable, value): pivotar ANTES de restar
piv = qna.pivot_table(index=['code', 'date'], columns='variable', values='value')
share_i = np.exp(piv['log_gfcf_real'] - piv['log_gdp_real']) # FBCF
share_c = np.exp(piv['log_con_real'] - piv['log_gdp_real'])
```

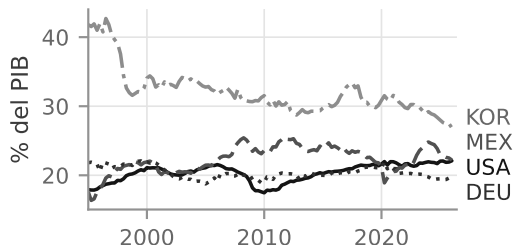
No usen `fetch_qna_expenditure` aquí: filtra `PRICE_BASE='L'` (encadenado) y México sólo publica base fija 'Q', devolviendo un DataFrame vacío. El CSV congelado ya trae los cuatro países, MEX en base fija.

*Bajo cambio técnico específico a la inversión, la participación nominal es constante y la real crece (GHK 1997).*

### Consumo / PIB



### Inversión (FBCF) / PIB



## En la SCB, trabajo y capital inicial también salen de los parámetros

### Paso 2: Trabajo en la SCB ( $L_t^{scb}$ )

$$L_t^{scb} = \frac{(1 - \alpha)N_t}{1 - \alpha + \gamma \left(1 - \frac{(g + \delta)\alpha}{\frac{1+g}{\beta} - 1 + \delta}\right)}$$

- El trabajo por habitante  $L_t^{scb}/N_t$  es constante.
- Crece a la tasa de población:  $1 + \hat{L}^{scb} = 1 + \hat{N}$ .

### Paso 3: Capital Inicial en la SCB ( $K_0^{scb}$ )

$$K_0^{scb} = \left( \frac{\alpha A_1}{\frac{1+g}{\beta} - 1 + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_1^{scb}$$

- Fija el punto de partida sobre la SCB para evitar dinámicas transitorias no deseadas.
- $K_t^{scb}$  crece exactamente a la tasa  $1 + g$ .

### Invariante de Calibración en la SCB

Las propiedades dinámicas de desviación son idénticas a las del modelo sin crecimiento: los ratios de largo plazo dependen únicamente de  $(\alpha, \beta, \delta, g)$ , no de  $K_0$ . Para aplicar aproximaciones locales (Dynare), primero debemos eliminar la tendencia exógena.

## Mini-proyecto: la SCB de dos velocidades — GHK en Dynare

---

Modifiquen la ley de acumulación para escribir el principio CTEI en el modelo:

$$K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + Q_t I_t, \quad Q_{t+1} = (1 + g_Q)Q_t$$

(Cuidado con la notación:  $g_Q$  es la **tasa de crecimiento** de  $Q_t$ ; el símbolo  $q_t$  sigue reservado para el **precio de renta del capital** de la Euler.)

- $Y$  y  $C$  crecen a la tasa  $g$ ;  $K$  e  $I$  **medidos en unidades de equipo** crecen a  $g + g_Q$ ; el precio relativo de la inversión cae exactamente a la tasa  $g_Q$
- La caída del precio relativo del equipo se convierte así en la **calibración de  $g_Q$** :  $\approx 4.8\%$  anual para equipo, un factor  $\approx 41$  desde 1947 (más de un orden y medio de magnitud)
- Partan del .mod de previsión perfecta que veremos en la segunda sesión de este bloque (las veinte líneas de la transparencia de Dynare), deflacten **cada variable por su propia tasa**, verifiquen las dos tasas numéricamente y comparen con FRED

```
// unica linea que cambia en el bloque model;  
k = (1-delta)*k(-1) + Q*i;    // Q crece a la tasa g_Q
```

**Ojo con las unidades de  $I$ :** en unidades de consumo crece a  $g$ ; en unidades de equipo, a  $g + g_Q$ . Esa distinción es lo que el proyecto enseña: *eliminar la tendencia es una decisión de modelado, no una rutina.*

(Greenwood, Hercowitz y Krusell 1997; Fisher 2006; Justiniano, Primiceri y Tambalotti 2010)

# Capital barato y calificación son complementarios: el equipo mueve la prima

## Tecnología CES Anidada (KORV 2000)

El capital equipo  $K_e$  se anida con el trabajo calificado  $L_s$ , dentro de un CES externo con el no calificado  $L_u$ :

$$Y = A \left\{ \mu (uL_u)^\sigma + (1 - \mu) \left[ \lambda K_e^\rho + (1 - \lambda)(sL_s)^\rho \right]^{\sigma/\rho} \right\}^{1/\sigma}$$

Elasticidades de sustitución:  $\frac{1}{1-\sigma}$  (equipo frente a  $L_u$ ) y  $\frac{1}{1-\rho}$  (equipo frente a  $L_s$ ). **Complementariedad:**  $\sigma > \rho$  ( $\sigma \approx 0.4$ ,  $\rho \approx -0.5$ ).

## Descomposición de la Prima por Calificación

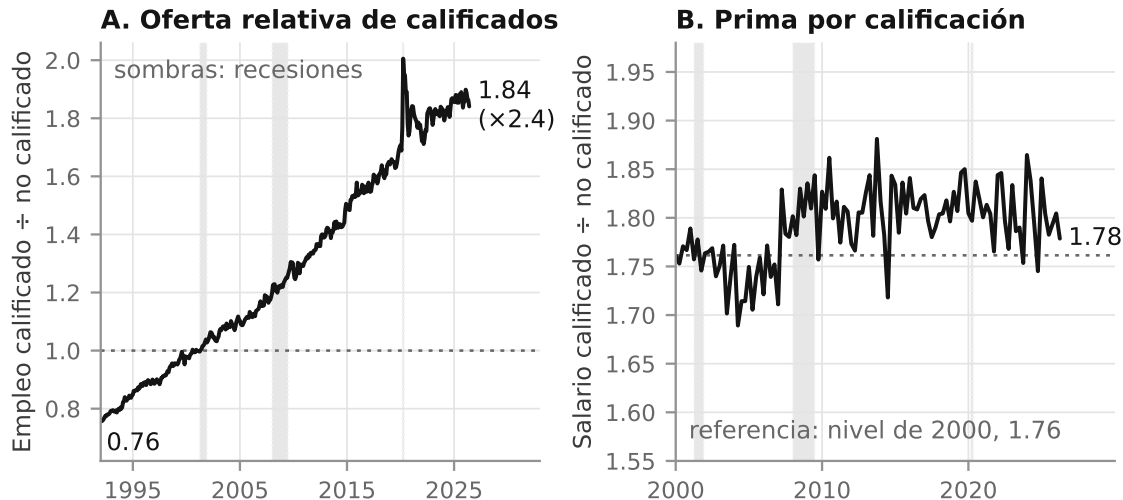
Con  $G \equiv [\lambda K_e^\rho + (1 - \lambda)(sL_s)^\rho]^{1/\rho}$ , el cociente de productos marginales determina la prima:

$$\log \frac{w_s}{w_u} = \text{cte} + \log \frac{s}{u} + \underbrace{(\sigma - \rho) \log \frac{G}{sL_s}}_{\text{profundización de equipo}} - \underbrace{(1 - \sigma) \log \frac{sL_s}{uL_u}}_{\text{efecto oferta relativa}}$$

**Efecto equipo** ( $\sigma > \rho$ ): acumular equipo por calificado ( $K_e/sL_s \uparrow$ ) **sube** la prima. El abaratamiento del equipo es teoría distributiva.

**Efecto oferta** ( $\sigma < 1$ ): mayor abundancia de calificados deprime la prima (−32 % sin equipo en EUA 1963–1992).

## Sin el término de equipo, la prima por calificación debería haberse hundido 32 %



La oferta relativa de calificados se multiplica por 2.4 desde 1992 (de 0.76 a 1.84) mientras la prima se mueve dentro de una banda estrecha en torno a su nivel de 2000. Las sombras son recesiones; el pico de 2020 es composición pandémica, no un cambio real de precios.

## La cuenta de servilleta: $-0.38$ puntos log de oferta contra $+3\%$ observado

### Cuenta de servilleta (2000-2025)

Entre 2000 y 2025 la oferta relativa pasa de 0.99 a 1.87 ( $+0.64$  puntos log). Con  $\sigma = 0.4$ , el término de oferta por sí solo predice

$$\Delta \log \frac{w_s}{w_u} \Big|_{\text{oferta}} = -(1 - \sigma) \times 0.64 \approx -0.38 \text{ puntos log},$$

es decir una prima **32 % menor**. Lo observado es  $+3\%$ . Los términos de equipo y de sesgo tecnológico tienen que haber aportado  $\approx +0.41$  puntos log.

### Pregunta para la discusión

¿Qué observarían en  $K_e$  y en el precio del equipo para que esa cuenta cierre — y qué pasa con ella si la IA sustituye al calificado en vez de complementarlo?

$\sigma = 0.401$  es la estimación de Krusell, Ohanian, Ríos-Rull y Violante (2000), no una estimación propia: la cuenta es ilustrativa. Las cifras salen de las series de la lámina anterior —BLS/FRED, ocupados y salarios medianos por nivel educativo— como medias anuales de 2000 y 2025.

## Mini-proyecto (casa): complementariedad capital-calificación (KORV) con lentes de IA

---

```
import pandas as pd
from puremacro import korv_gmm
# momentos KORV (EU-KLEMS) precomputados, ya con las dlog_*
panel = pd.read_csv('data/korv_panel_klems.csv') # data/ = cuaderno 21
res = korv_gmm.fit_korv_pooled(panel)           # GMM estructural
# klems.load_klems_panel(...) exige el cache local de EU-KLEMS:
# sin el devuelve un DataFrame VACIO, en silencio. Revisen .empty
```

- ¿Sale la elasticidad equipo-calificado **menor** que la equipo-no calificado (complementariedad entre capital y calificación)?
- ¿Qué implica si la IA acelera la caída del precio del equipo?
- ¿Y si la IA sustituye precisamente al calificado: qué signo cambia en los datos?

*fit\_korv\_pooled devuelve un `KorvFit` con `sigma_su`, `sigma_eu`, `sigma_es` y el estadístico de Hansen: la complementariedad capital-calificación es  $\sigma_{es} < \sigma_{eu}$ . EUA sí está en EU-KLEMS (mapeo 'US' → 'USA'). El panel de momentos KORV viaja precomputado con las lecciones y por eso el ejercicio corre offline; el micro-panel EU-KLEMS completo requiere el caché local de EU-KLEMS, que no se distribuye.*

(Krusell, Ohanian, Ríos-Rull y Violante 2000; Acemoglu y Restrepo 2022)

## Resolver el modelo es elegir aproximación — local con Dynare, global con la función de valor

---

- Log-linealización en torno al estado estacionario (y qué cambia en la SCB) —  $\approx 40$  min
- **Dynare**: previsión perfecta, cambios permanentes y transitorios —  $\approx 45$  min
- Equilibrio competitivo recursivo y ecuaciones de Bellman —  $\approx 35$  min
- Iteración de la función de valor: teoría e implementación numérica —  $\approx 35$  min
- Cierre: laboratorio — Galí (1999) contra el modelo y VFI contra la solución exacta —  $\approx 25$  min

## Eliminación de la tendencia: la SCB se convierte en un estado estacionario

---

Eliminamos el crecimiento de la productividad y de la población deflactando la restricción presupuestaria agregada por la tasa de crecimiento en la senda de crecimiento balanceado  $(1 + g)^{t-1}$

$$\frac{C_t}{(1 + g)^{t-1}} + \frac{K_t}{(1 + g)^{t-1}} - (1 - \delta) \frac{K_{t-1}}{(1 + g)^{t-1}} = \frac{A_t K_{t-1}^\alpha L_t^{1-\alpha}}{(1 + g)^{t-1}}$$

resultando, con las definiciones  $c_t \equiv C_t/(1 + g)^{t-1}$ ,  $y_t \equiv Y_t/(1 + g)^{t-1}$  y  $k_t \equiv K_t/(1 + g)^{t-1}$  (el capital elegido en  $t$  se deflacta con la tendencia de  $t$ , de modo que  $K_t/(1 + g)^{t-1} = (1 + g)k_t$ ), en la siguiente restricción:

$$c_t + (1 + g)k_t - (1 - \delta)k_{t-1} = ak_{t-1}^\alpha l_t^{1-\alpha}$$

También debemos transformar la función de utilidad:

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} [\log(C_t) + \gamma \log(N_t - L_t)] =$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} [\log(c_t) + \gamma \log(n - l_t)] + [\log(1 + g) + \gamma \log(1 + \hat{N})] \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} (t - 1)$$

donde  $n = N_t/(1 + \hat{N})^{t-1}$  es constante. En adelante **normalizamos**  $n = 1$ .

## El problema sin tendencia conserva las mismas condiciones, con $(1 + g)$ en la Euler

### Problema Estacionarizado

En variables deflactadas  $(c_t, l_t, k_t)$  con normalización  $n = 1$ :

$$\max_{c_t, l_t, k_t} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \{ \log(c_t) + \gamma \log(1 - l_t) \}$$

sujeto a:

$$c_t + (1 + g)k_t - (1 - \delta)k_{t-1} = ak_{t-1}^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$

### Condiciones de Eficiencia y Factibilidad

**Eficiencia intratemporal:**

$$\frac{\gamma c_t^*}{1 - l_t^*} = (1 - \alpha) \frac{y_t^*}{l_t^*}$$

**Ecuación de Euler (con factor  $1 + g$ ):**

$$(1 + g) \frac{c_{t+1}^*}{\beta c_t^*} = \alpha \frac{y_{t+1}^*}{k_t^*} + 1 - \delta$$

**Factibilidad agregada:**

$$c_t^* + (1 + g)k_t^* - (1 - \delta)k_{t-1}^* = y_t^*$$

## Tres ecuaciones no lineales de dimensión infinita: por eso hay que aproximar

Partimos del sistema no lineal formado por las condiciones de eficiencia y factibilidad:

### Sistema Dinámico No Lineal Exacto

$$F_1 = \frac{\gamma C_t^*}{N - L_t^*} - (1 - \alpha)A(K_{t-1}^*)^\alpha (L_t^*)^{-\alpha} = 0$$

$$F_2 = \frac{C_{t+1}^*}{\beta C_t^*} - \left[ \alpha A(K_t^*)^{\alpha-1} (L_{t+1}^*)^{1-\alpha} + 1 - \delta \right] = 0$$

$$F_3 = C_t^* + K_t^* - (1 - \delta)K_{t-1}^* - A(K_{t-1}^*)^\alpha (L_t^*)^{1-\alpha} = 0$$

### El Desafío Dimensional

$F(C_t^*, C_{t+1}^*, L_t^*, L_{t+1}^*, K_t^*, K_{t-1}^*) = 0$  es un sistema de ecuaciones no lineal de dimensión infinita ( $t = 1, \dots, \infty$ ). Para encontrar una solución cuantitativa computable, debemos recurrir a métodos de aproximación.

## Log-linealización (1/2): el logaritmo y un Taylor vuelven lineal el sistema

### Aproximación de Taylor en Desviaciones Logarítmicas

**Paso 1:** reescribimos cada variable endógena como  $X_t = e^{\log(X_t)}$ , expresando  $F$  en función de  $\log(\vec{X}_t)$ .

**Paso 2:** realizamos una aproximación de Taylor de primer orden en torno a  $\log(\vec{X}_{ss})$ :

$$F|_{\log(\vec{X}_t)=\log(\vec{X}_{ss})} = F(\vec{X}_{ss}) + \nabla F(\vec{X}_{ss}) [\log(X_t) - \log(X_{ss})] = 0$$

### Sistema Log-Linealizado ( $\tilde{X}_t \equiv \log(X_t/X_{ss})$ )

$$\tilde{C}_t^* + \left( \alpha + \frac{L_{ss}}{N - L_{ss}} \right) \tilde{L}_t^* - \alpha \tilde{K}_{t-1}^* = 0$$

$$\tilde{C}_{t+1}^* - \tilde{C}_t^* - (1 - \alpha) [1 - \beta(1 - \delta)] (\tilde{L}_{t+1}^* - \tilde{K}_t^*) = 0$$

$$C_{ss} \tilde{C}_t^* + K_{ss} \tilde{K}_t^* - (1 - \delta) K_{ss} \tilde{K}_{t-1}^* - \alpha Y_{ss} \tilde{K}_{t-1}^* - (1 - \alpha) Y_{ss} \tilde{L}_t^* = 0$$

## Log-linealización (2/2): postular reglas lineales deja tres incógnitas

### Paso 3: Reglas Lineales

Postulamos reglas lineales en el estado  $\tilde{K}_{t-1}^*$ :

$$\tilde{K}_t^* = \psi_k \tilde{K}_{t-1}^*$$

$$\tilde{L}_t^* = \psi_l \tilde{K}_{t-1}^*$$

$$\tilde{C}_t^* = \psi_c \tilde{K}_{t-1}^*$$

- $\psi_k, \psi_l, \psi_c$ : coeficientes indeterminados (elasticidades).
- Dependen de  $(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$ ; invariantes a  $A$  y  $N$ .

### Paso 4: Coeficientes Indeterminados

Sustituyendo en el sistema log-linealizado:

$$\psi_c + \left( \alpha + \frac{L_{ss}}{N - L_{ss}} \right) \psi_l - \alpha = 0$$

$$\psi_c \psi_k - \psi_c - (1 - \alpha) [1 - \beta(1 - \delta)] (\psi_l \psi_k - \psi_k) = 0$$

$$\frac{C_{ss}}{Y_{ss}} \psi_c + \frac{K_{ss}}{Y_{ss}} \psi_k - (1 - \delta) \frac{K_{ss}}{Y_{ss}} - \alpha - (1 - \alpha) \psi_l = 0$$

*El método de coeficientes indeterminados no cambia al pasar a la senda de crecimiento balanceado (SCB).*

## Del álgebra al número: la raíz estable es la senda de silla

### Calibración Trimestral y Raíz Estable

Con  $\alpha = 0.33$ ,  $\beta = 0.99$ ,  $\delta = 0.025$ ,  $\gamma = 1.75$  ( $A = N = 1$ ):

$$L_{ss} = 0.334, \quad \frac{K_{ss}}{Y_{ss}} = 9.4, \quad \frac{C_{ss}}{Y_{ss}} = 0.765$$

El sistema cuadrático en  $\psi_k$  tiene dos raíces:

$$\psi_k \in \{0.949, 1.065\}$$

La transversalidad descarta la raíz explosiva:

$$\psi_k = 0.949, \quad \psi_c = 0.537, \quad \psi_l = -0.249$$

### Propiedades Dinámicas de la Senda de Silla

- **Velocidad de convergencia:** el capital cierra  $\approx 5.1\%$  de su brecha por trimestre ( $\lambda = 1 - \psi_k$ ).
- **Vida media:**  $t_{1/2} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(\psi_k)} \approx 13.1$  trimestres ( $\approx 3.3$  años).
- **Signos de política:**
  - $\psi_c = 0.537 > 0$ : más capital eleva el consumo.
  - $\psi_l = -0.249 < 0$ : efecto riqueza domina el trabajo.
- **Geometría:** la regla  $\tilde{C}_t^* = \psi_c \tilde{K}_{t-1}^*$  es la aproximación lineal al brazo estable del diagrama de fases (lámina 16).

*Solución validada por tres vías independientes: raíz cuadrática del Paso 4, eigendecomposición lineal y método QZ de Klein (2000) vía `puremacro.dsge.klein.solve`. Coinciden a  $1e-15$ . La lámina 16 y el cuaderno T02\_A usan la calibración **anual** ( $\beta = 0.97$ ,  $\delta = 0.06$ ), donde la raíz estable es  $g_k = 0.885$  y la vida media 5.7 años.*

## ¿Qué cambia con la SCB? Solo los términos con $(1 + g)$

El sistema log-linealizado en torno a la SCB es idéntico al del estado estacionario, salvo los términos **enmarcados**:

### Modificaciones Inducidas por el Crecimiento Tendencial

$$\tilde{c}_t^* + \left( \alpha + \frac{l_{ss}}{1 - l_{ss}} \right) \tilde{l}_t^* - \alpha \tilde{k}_{t-1}^* = 0$$

$$\tilde{c}_{t+1}^* - \tilde{c}_t^* - (1 - \alpha) \left[ 1 - \frac{\beta(1 - \delta)}{1 + g} \right] (\tilde{l}_{t+1}^* - \tilde{k}_t^*) = 0$$

$$\frac{c_{ss}}{y_{ss}} \tilde{c}_t^* + (1 + g) \frac{k_{ss}}{y_{ss}} \tilde{k}_t^* - (1 - \delta) \frac{k_{ss}}{y_{ss}} \tilde{k}_{t-1}^* - \alpha \tilde{k}_{t-1}^* - (1 - \alpha) \tilde{l}_t^* = 0$$

### Invarianza Metodológica y Automatización

El sistema de coeficientes indeterminados  $(\psi_c, \psi_l, \psi_k)$  hereda exactamente esos dos factores: la raíz cuadrática en  $\psi_k$  sustituye  $\beta(1 - \delta)$  por  $\beta(1 - \delta)/(1 + g)$  y escala  $k_{ss}/y_{ss}$  por  $(1 + g)$ . En modelos de mayor escala, esta rutina se especifica y resuelve directamente en **Dynare**.

## Especificación declarativa y solución en Python con `puremacro.dsge`

---

Las aproximaciones locales de modelos DSGE crecen en dimensión rápidamente. Para evitar resolver a mano sistemas matriciales enormes, escribimos las ecuaciones en un archivo declarativo **.mod** (formato estándar Dynare) y lo resolvemos en Python mediante `puremacro.dsge`:

- **Descomposición QZ de Klein (2000)**: para perturbaciones de 1.er orden, el motor interno calcula la descomposición generalizada de Schur de las matrices Jacobianas, separando raíces estables y explosivas para verificar la condición de Blanchard-Kahn y derivar la regla de política lineal.
- **Previsión perfecta (choques MIT)**: `puremacro.dsge.load_mod` resuelve las transiciones no lineales de modelos/`neoclasico_prevision_perfecta.mod` apiladas en el tiempo mediante Newton-Raphson sin software comercial.
- **Estructura de bloques**:
  - Declaración: **var** (endógenas), **varexo** (choques) y **parameters** (calibración).
  - Modelo: ecuaciones entre **model;** y **end;** tal como se escriben en el pizarrón.
  - Trayectorias: semillas con **initval;**, cambio con **endval;** y cálculo de estado estacionario con **steady;**.

## Veinte líneas de .mod bastan para un cambio permanente de productividad

---

Este ejemplo simula un incremento permanente en la productividad con calibración **anual** ( $\beta = 0.97$ ,  $\delta = 0.06$ ,  $K/Y = 3.6$ ), resuelto en Python con `puremacro.dsge.load_mod`:

```
var y c k l; varexo a;
parameters alpha beta gamma delta n;
alpha=0.33; beta=0.97; gamma=1.0; delta=0.06; n=1; // ANUAL

model;
gamma*c/(n-1) = (1-alpha)*y/l;
c(+1)/(beta*c) = alpha*y(+1)/k + 1 - delta;
c + k - (1-delta)*k(-1) = y;
y = a*k(-1)^alpha*l^(1-alpha);
end;

initval; a=1; y=1; c=0.75; k=3.5; l=0.33; end;
steady;
endval; a = 1.02; end;
steady;

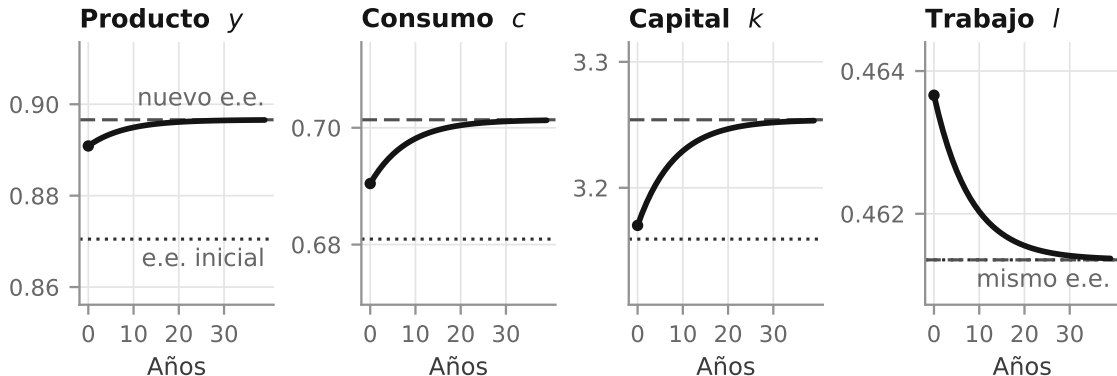
perfect_foresight_setup(periods=200);
perfect_foresight_solver;
```

`steady` necesita valores iniciales para las endógenas: sin las semillas de `initval`,  $y$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $l$  arrancan en cero y las divisiones  $y/l$  y  $c/(n - l)$  hacen fallar al solucionador.

Estas transiciones de previsión perfecta son los «choques MIT» de la literatura moderna (Boppart, Krusell y Mitman 2018).

## El cambio permanente: transición entre dos estados estacionarios

Un aumento permanente de 2 % en la productividad mueve la economía entre dos estados estacionarios; las discontinuas marcan el de partida y el de llegada (los objetos de simulación y el script en Python que dibuja las trayectorias están en el apéndice).



**Lectura:** el consumo salta en impacto y aun así se queda por debajo de su nuevo nivel; el capital tarda unos veinte **años** en cerrar el 90 % de la brecha (calibración anual:  $g_k = 0.885$ , T02\_A); las horas suben y vuelven al mismo nivel de largo plazo, porque  $L_{ss}$  no depende de  $A$ .

## Debate: ¿la IA es un $\Delta A$ o un $\Delta Q$ ?

---

### ¿Choque Neutral ( $\Delta A$ ) o Específico ( $\Delta Q$ )?

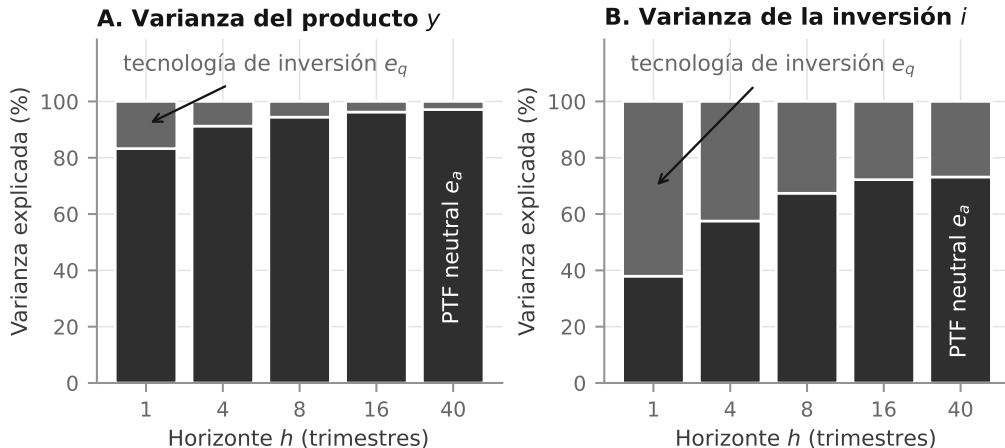
Si la IA opera como  $\Delta Q$  (principio CTEI) y no un simple  $\Delta A$  neutro, emergen contrastes decisivos:

- **Precio relativo del equipo:** cae de forma sistemática.
- **Participación laboral:** se deteriora por sustitución de capital (Karabarbounis y Neiman 2014).
- **Volatilidad:** la evidencia SVAR de Fisher (2006) atribuye a los choques de inversión  $> 50\%$  de la varianza cíclica; la lámina siguiente confronta esa cifra con la descomposición del RBC del curso, que no la reproduce: exigiría un  $\sigma_q$  mucho mayor y un  $\rho_q$  cercano a uno.
- **Prima salarial:** sube por complementariedad equipo-calificación (KORV 2000).

*Proxy de IA para investigación: STATE\_AI\_EXPOSURE\_2019 (BLS-OES 2019 / Felten, Raj y Seamans 2021).*

(Greenwood, Hercowitz y Krusell 1997; Fisher 2006; Justiniano, Primiceri y Tambalotti 2010; Karabarbounis y Neiman 2014; Acemoglu y Restrepo 2018; Aghion et al. 2019; Felten et al. 2021; Acemoglu 2024)

## ¿Cuánta varianza explica el choque específico a la inversión?

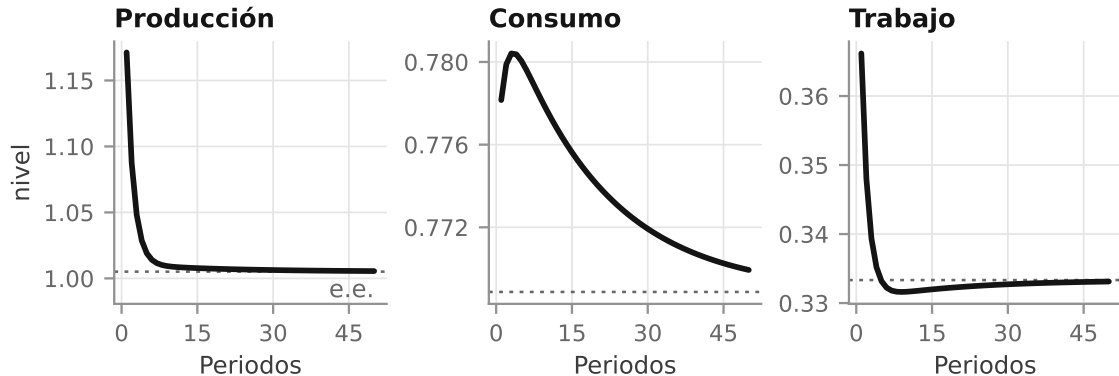


En el RBC multi-choque de T02\_B ( $\sigma_a = 0.007$ ,  $\sigma_q = 0.008$ ,  $\rho_q = 0.6$ ) la PTF neutra  $a$  explica del 83 % ( $h=1$ ) al 97 % ( $h=40$ ) de la varianza del **producto**; el choque específico  $q$  solo domina la **inversión**, y solo en impacto (62 % en  $h=1$ , 27 % en  $h=40$ ). El > 50 % de Fisher (2006) es evidencia SVAR, no un resultado de este modelo. | Companion: T02\_B §6.

## Tras un choque transitorio, todo vuelve al estado estacionario

Con una calibración trimestral de posguerra para Estados Unidos excluyendo el Covid, un choque transitorio solo necesita añadir un bloque `shocks`;: un pulso de +1 % en  $a$  durante cuatro trimestres.

```
alpha=0.33; beta=0.99; gamma=1.75; delta=0.025; n=1;  
initval; a=1; y=1; c=0.765; k=9.4; l=0.334; end;    steady;  
shocks; var a; periods 1:4; values 1.01; end;  
perfect_foresight_setup(periods=100);    perfect_foresight_solver;
```



La figura es la contraparte **estocástica** ( $\alpha_t$  AR(1) con  $\rho_\alpha = 0.5$ ), resuelta con el mismo método QZ del Paso 4 y con el impulso reescalado para que se lea: la forma —salto y regreso al mismo estado estacionario— es la del `.mod`; la escala, no.

# Sensibilidad a la elasticidad de Frisch: el canal de oferta de trabajo

## Sustitución Intertemporal

La elasticidad de Frisch  $\eta$  determina la respuesta del empleo ante el salario real:

$$\hat{l}_t = \eta(\hat{w}_t - \hat{\lambda}_t)$$

- $\eta \approx 0.4$  (micro, MaCurdy): el salario absorbe el choque; las horas casi no varían (impacto  $\partial l / \partial e_a = 0.08$ ).
- $\eta \approx 10$  (trabajo indivisible de Hansen 1985 / Rogerson 1988): las horas responden cinco veces más (0.40).

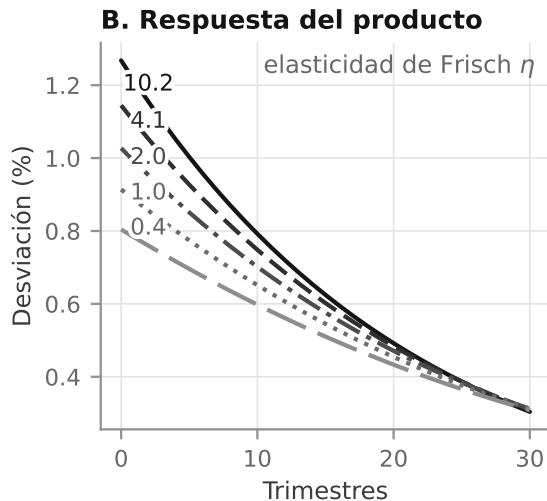
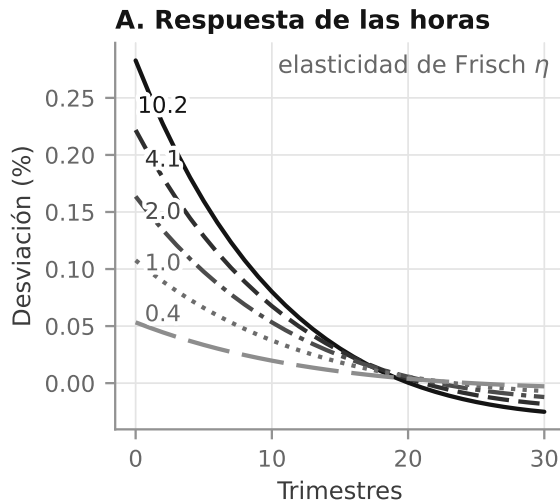
*Advertencia: ni siquiera el límite indivisible de Hansen ( $\nu = 0$ ,  $\partial l / \partial e_a = 0.50$ , amplificación  $6.5 \times$  frente al caso micro) acerca la volatilidad relativa de las horas al dato: el modelo entrega  $\sigma(l) / \sigma(y) = 0.17$  frente a 0.86 en EUA.*

## Python (puremacro) — puremacro.dsge (T02\_B)

En `rbc_canonico.mod` el parámetro declarado es la **curvatura del ocio**  $\nu$ , y la elasticidad de Frisch implícita es  $\eta = (1 - l) / (l\nu)$ :  $\nu$  grande es  $\eta$  pequeña. `m = load_mod(rbc_mod_path,`

```
    params={'nu': v, 'mu': mu_v})  
irf = m.irf('e_a', horizon=30, size=0.007)  
# v recorre [0.2, 0.5, 1, 2, 5]
```

## El abanico de Frisch: cuanto mayor es $\eta$ , más se mueven las horas



Barrido de la curvatura del ocio  $\nu \in \{0.2, 0.5, 1, 2, 5\}$  sobre `rbc_canonico.mod`, reetiquetado por la elasticidad de Frisch implícita  $\eta$ : las respuestas se abren en el impacto y convergen hacia el trimestre 20. El canal de oferta de trabajo es lo único que separa las curvas.

## Ejercicio: el modelo dice que las horas suben; Galí dice que bajan

---

En las IRFs que acabamos de generar, un choque de productividad **sube** las horas. Identifiquemos el mismo objeto en los datos con un SVAR de Blanchard-Quah sobre el par  $\Delta \log(\text{productividad})$  y  $\Delta \log(\text{horas per cápita})$ : las horas **caen** en impacto (Galí 1999).

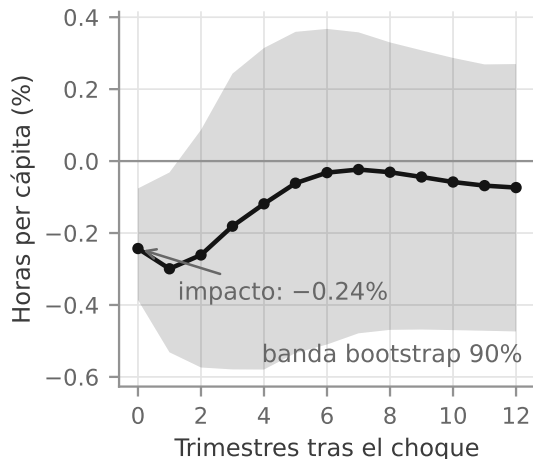
```
import numpy as np, pandas as pd
from puremacro.var.identify.bq import bq_svar

df = pd.read_csv('data_curso/gali1999.csv')          # snapshot offline
prod = 100*np.log(df['ophnfb'])                      # o FRED en vivo
horas = 100*np.log(df['hoanbs']/df['cnp16ov'])
Y = np.column_stack([prod.diff(), horas.diff()])[1:]
irf = bq_svar(Y, p=4, horizon=20, permanent_var_idx=0)
```

- `examples/gali_1999_hours.py` es la solución completa
- Contraste con `statsmodels: teaching.var_sm`; el mismo identificador BQ sobre el sistema alternativo  $[\Delta \log \text{PIB}, \text{tasa de desempleo}]$  está en `teaching.bq_canonical.bq_gdp_urate`

(Galí 1999; Blanchard y Quah 1989; Christiano, Eichenbaum y Vigfusson 2003; Basu, Fernald y Kimball 2006)

## Las horas caen en impacto: el dato contra el modelo



La IRF identificada con Blanchard-Quah pone las horas per cápita en  $-0.24\%$  en impacto, con su banda bootstrap del  $90\%$  alrededor. El RBC canónico de T02\_B predice el signo contrario para el mismo choque,  $+0.13\%$ .

**Debate:** ¿esto mata al RBC o a la identificación? (CEV 2003: la respuesta cambia con horas en diferencias vs en niveles). Es la primera vez en el curso que una identificación estructural se usa como **prueba** de un modelo que ustedes acaban de resolver.

Fuente: FRED OPHNFB, HOANBS y CNP160V; VAR(4) con identificación de largo plazo y banda bootstrap del  $90\%$ . La figura diferencia toda la serie y estima sobre 1948T2-2007T4; el cuaderno recorta la muestra **antes** de diferenciar (arranca en 1948T3) y obtiene  $-0.23\%$ . Companion: T02\_B §4.

# Más allá del choque único: descomposición de varianza en modelos DSGE

---

## Descomposición Histórica y FEVD

La macro cuantitativa no descansa en un único choque. Con el suavizador de Kalman (`puremacro.dsge`), los modelos DSGE estiman la contribución conjunta de múltiples perturbaciones estructurales.

## Resolución del Debate Galí (1999)

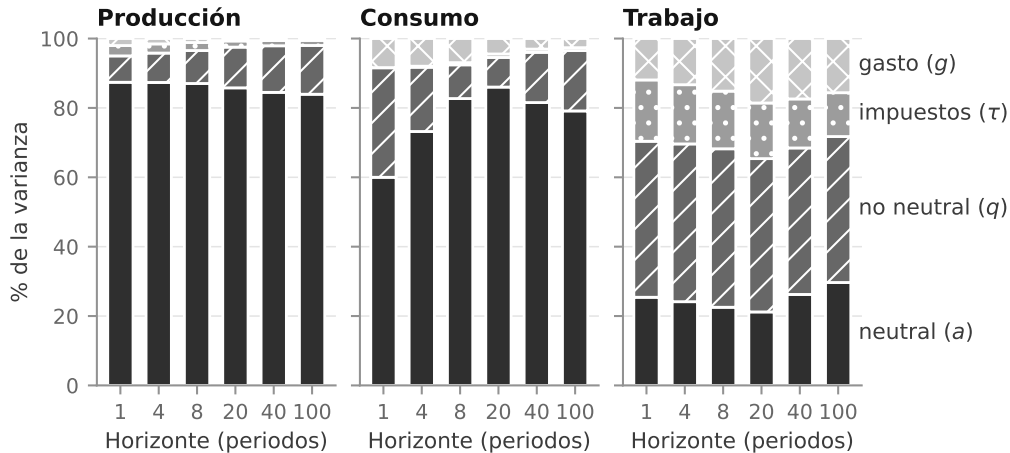
- Choques de inversión y fiscales explican fluctuaciones de corto plazo en horas y empleo.
- La PTF neutra ( $A_t$ ) domina la tendencia y persistencia de largo plazo.

*El cuaderno companion llega hasta la FEVD de dos choques; el RBC fiscal de cuatro choques de la lámina siguiente es material de la lámina, no del cuaderno.*

(Smets y Wouters 2007; Justiniano, Primiceri y Tambalotti 2010) | Companion: T02\_B §6 (FEVD con  $a$  y  $q$ ) y §10 (suavizador de Kalman y descomposición de choques).

## Cuatro choques estructurales repartiéndose la varianza

El RBC ampliado añade a la PTF neutra ( $\alpha$ ) un choque específico a la inversión ( $q$ ), uno de impuestos ( $\tau$ ) y uno de gasto público ( $g$ ); cada barra reparte la varianza del error de pronóstico entre los cuatro.



**Lectura:** la PTF neutra domina en todos los horizontes, pero la mezcla depende de la variable —el trabajo es donde los choques fiscales pesan más— y del horizonte.

## El problema de secuencias del hogar colapsa en una ecuación de Bellman

---

La noción de equilibrio que hemos usado descansa en secuencias infinitas de cantidades y precios. La formulación recursiva las sustituye por **funciones**: el comportamiento óptimo queda caracterizado por una **ecuación de Bellman** y el equilibrio, por una lista de funciones más una ley de movimiento del estado agregado.

Partimos de la función indirecta de utilidad de un hogar propietario del capital,  $v(k_0, b_0)$ :

$$v(k_0, b_0) = \max_{l_{st}, c_t, k_{st}, b_t} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \{ \gamma \log(1 - l_{st}) + \log(c_t) \}$$

sujeto a:

$$c_t + (1 + g)k_{st} - (1 - \delta)k_{st-1} + (1 + g)b_t = q_t k_{st-1} + w_t l_{st} + (1 + r_{t-1})b_{t-1}$$

Separamos el primer sumando y factorizamos  $\beta$  en el resto,  $\sum_{t=2}^{\infty} \beta^{t-1} \{ \cdot \} = \beta \sum_{t=2}^{\infty} \beta^{t-2} \{ \cdot \}$ . La cola es el mismo problema con estado inicial  $(k_{s1}, b_1)$ , es decir, vale  $v(k_{s1}, b_1)$ , de modo que

$$v(k_0, b_0) = \max_{l_s, c, k', b'} \{ \gamma \log(1 - l_s) + \log(c) + \beta v(k', b') \}$$

## El hogar recursivo iguala el costo de ahorrar hoy al valor marginal de mañana

---

Por lo tanto, podemos reescribir el problema del hogar de forma recursiva como:

$$v(k_s, b; w, q, r) = \max_{l_s, c, k'_s, b'} \{ \gamma \log(1 - l_s) + \log(c) + \beta v(k'_s, b'; w', q', r') \}$$

sujeto a:

$$c + (1 + g)k'_s - (1 - \delta)k_s + (1 + g)b' = wl_s + qk_s + (1 + r)b$$

si tomamos condiciones de primer orden —con  $\lambda$  el multiplicador de la restricción presupuestaria (aquí  $\lambda = 1/c$ )—, llegamos a una condición de eficiencia estática:

$$\frac{\gamma c}{1 - l_s} = w$$

y dos condiciones de eficiencia dinámica: con respecto de  $k'$ :

$$(1 + g)\lambda = \beta \frac{\partial v}{\partial k_s}(k'_s, b'; w', q', r')$$

y respecto de  $b'$ :

$$(1 + g)\lambda = \beta \frac{\partial v}{\partial b}(k'_s, b'; w', q', r')$$

## La envolvente convierte la ecuación de Bellman en ecuaciones de Euler

---

### Teorema de la Envolvente

A pesar de no conocer  $v$ , obtenemos sus derivadas marginales evaluando el Lagrangiano en el óptimo:

$$\frac{\partial v}{\partial k_s}(k_s, b; w, q, r) = (q + 1 - \delta)\lambda$$

$$\frac{\partial v}{\partial b}(k_s, b; w, q, r) = (1 + r)\lambda$$

### Ecuaciones de Euler y No Arbitraje

Sustituyendo  $\lambda = 1/c$  y  $\lambda' = 1/c'$  en las condiciones dinámicas:

$$(1 + g)\frac{c'}{\beta c} = q' + 1 - \delta$$

$$(1 + g)\frac{c'}{\beta c} = 1 + r'$$

**No arbitraje:**  $q' + 1 - \delta = 1 + r'$ . Prescindir del mercado de bonos no altera el equilibrio real.

## El equilibrio recursivo es una lista de funciones más un punto fijo

---

Un equilibrio competitivo recursivo es una lista de funciones  $v(k_s, b; w, q, r)$ ,  $c(k_s, b; w, q, r)$ ,  $l_s(k_s, b; w, q, r)$ ,  $k'_s(k_s, b; w, q, r)$ ,  $b'(k_s, b; w, q, r)$ ,  $k_d(w, q)$ ,  $l_d(w, q)$ ,  $w(K, B)$ ,  $q(K, B)$ ,  $r(K, B)$  y leyes de movimiento agregadas  $K' = G(K, B)$  y  $B' = H(K, B)$  (en equilibrio,  $H(K, B) = 0$ : los bonos están en oferta neta nula), tales que, dadas las funciones de precios  $w(K, B)$ ,  $q(K, B)$  y  $r(K, B)$ :

- $v(k_s, b; w, q, r)$ ,  $c(k_s, b; w, q, r)$ ,  $l_s(k_s, b; w, q, r)$ ,  $k'_s(k_s, b; w, q, r)$  son solución de la ecuación de Bellman del hogar
- $k_d(w, q)$ ,  $l_d(w, q)$  son solución del problema de la empresa representativa
- $w(K, B)$ ,  $q(K, B)$  y  $r(K, B)$  son tales que los mercados están en equilibrio
- **Consistencia:** la ley de movimiento percibida reproduce las decisiones individuales evaluadas en el estado agregado,  $G(K, B) = k'_s(K, B; w(K, B), q(K, B), r(K, B))$  — el punto fijo que hace “recursivo” al equilibrio

La consistencia es la pieza que hace portátil la definición: si el estado agregado dejara de ser el número  $K$ ,  $G$  seguiría siendo una ley de movimiento sobre ese estado y las cuatro condiciones seguirían diciendo lo mismo, palabra por palabra.

## Quién posee el capital no altera la asignación: el arrendamiento es un velo

La misma economía admite que sea la **empresa**, y no el hogar, la propietaria del acervo. El hogar solo tiene bonos y la acción de la empresa,  $v(b; w, r)$  con restricción  $c + (1 + g)b' = wl_s + (1 + r)b + d$ , donde  $d$  es el dividendo del periodo; la empresa elige  $k'$  resolviendo su propia ecuación de Bellman  $\Pi(k; w, r)$ , con un factor  $(1 + g)$  en la continuación porque los dividendos en niveles crecen a la tasa  $g$ .

**La asignación de equilibrio es la misma**, y la razón es que el arrendamiento del capital es un velo contable. Llamemos  $R$  al rendimiento bruto entre el periodo corriente y el siguiente:

- La condición de primer orden respecto de  $k'$  y la envolvente de la empresa,  $\frac{\partial \Pi}{\partial k} = q + 1 - \delta$ , dan la **no arbitraje**  $R = q' + 1 - \delta$ : el bono debe rendir lo mismo que el capital
- La Euler de bonos del hogar,  $(1 + g)\frac{c'}{\beta c} = R$ , se vuelve entonces  $(1 + g)\frac{c'}{\beta c} = \alpha \frac{y'}{k'} + 1 - \delta$ : exactamente la Euler del hogar dueño del capital
- Sustituyendo  $d = ak^\alpha l_d^{1-\alpha} + (1 - \delta)k - wl_d - (1 + g)k'$  en la restricción del hogar, con bonos en oferta neta cero y  $l_s = l_d = l$ , se recupera la factibilidad agregada  $c + (1 + g)k' - (1 - \delta)k = ak^\alpha l^{1-\alpha}$
- La condición intratemporal  $\frac{\gamma c}{1 - l_s} = w = (1 - \alpha)\frac{y}{l}$  no depende de quién posee el acervo

Lo único que cambia es el **estado individual** del hogar — $b$  en lugar de  $(k_s, b)$ , y el precio  $q$  desaparece de su problema— y quién resuelve la decisión intertemporal. El álgebra completa está en el apéndice.

## El planificador recursivo devuelve las mismas condiciones que la descentralización

---

Los problemas dinámicos de hogares y empresas admiten una versión recursiva, y el del planificador social también:

$$v(k) = \max_{l, c, k'} \{ \gamma \log(1 - l) + \log(c) + \beta v(k') \}$$

sujeto a:

$$c + (1 + g)k' - (1 - \delta)k = ak^\alpha l^{1-\alpha}$$

De este problema surgen condiciones de eficiencia y factibilidad que coinciden con las de la solución descentralizada, con el capital o sin él en manos del hogar:

$$\frac{\gamma c}{1 - l} = (1 - \alpha) \frac{y}{l}$$

$$(1 + g) \frac{c'}{\beta c} = \alpha \frac{y'}{k'} + 1 - \delta$$

Con un hogar representativo las tres formulaciones coinciden y la maquinaria recursiva parece un rodeo. Se vuelve indispensable cuando los hogares dejan de ser idénticos y el riesgo individual no está asegurado: entonces el estado agregado ya no es el número  $k$  sino la **distribución** de riqueza entre hogares, ningún planificador replica el equilibrio y ninguna secuencia lo resume. La ley de movimiento  $G$  pasa a operar sobre distribuciones, y esa es la versión del modelo que el curso resolverá numéricamente.

## La programación dinámica hace falta cuando la decisión no es suave

---

No es la técnica de primera mano empleada en los modelos de ciclos económicos reales, pero se vuelve necesaria cuando pensamos en contextos como decisiones de trabajar o no trabajar o cuando hay determinados costos de ajuste del capital y el trabajo.

Para resolver la iteración de la función de valor en el ordenador ante incertidumbre agregada, convertimos el proceso autorregresivo continuo de productividad:

$$a_{t+1} = \rho a_t + \epsilon_{t+1}$$

en un proceso discreto  $P(a' | a)$  para  $a$  y  $a'$  en una malla discreta  $\mathbf{A}$ . El método más común es el de **discretización de Tauchen** y escribimos la ecuación de Bellman como:

$$v(k, a) = \max_{l, c, k'} \left\{ \log(c) + \gamma \log(1 - l) + \beta \sum_{a' \in \mathbf{A}} P(a' | a) v(k', a') \right\}$$

## El operador de Bellman es contractivo: iterarlo encuentra la función de valor

---

El siguiente problema que debemos afrontar es que desconocemos la forma analítica de  $v(k)$ , pero el operador de Bellman es contractivo y preserva monotonidad y concavidad. El siguiente algoritmo permite encontrar la función de valor:

1. Elegimos un  $\epsilon > 0$  y una función cóncava y creciente  $v^{(0)}(k)$
2. Obtenemos  $v^{(1)}(k)$  como solución de Bellman dado  $v^{(0)}(k)$
3. Calculamos  $\hat{\epsilon} = d \left[ v^{(1)}(k), v^{(0)}(k) \right]$ . Si  $\hat{\epsilon} \leq \epsilon$ , hemos encontrado la solución. Si no:

$$v^{(0)}(k) = v^{(1)}(k)$$

y repetimos el paso 2 hasta que  $\hat{\epsilon} \leq \epsilon$

4. Recuperamos la última función de valor  $v^{(T)}(k)$  y las reglas de decisión asociadas a la misma

**Con  $\delta = 1$  la iteración converge a mano a cte +  $\frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \log(k)$**

---

Vamos a considerar el caso  $\delta = 1$  y  $g = 0$  y elegimos  $v^{(0)}(k) = 0$  para todo  $k \geq 0$

$$v^{(1)}(k) = \max_{c, k'} \left\{ \log(Ak^\alpha - k') + \beta v^{(0)}(k') \right\}$$

que implica  $k'^{(0)}(k) = 0$  y  $v^{(1)}(k) = \log(A) + \alpha \log(k)$

$$v^{(2)}(k) = \max_{c, k'} \left\{ \log(Ak^\alpha - k') + \beta v^{(1)}(k') \right\}$$

Supongamos que llegamos a la iteración  $T$

$$v^{(T)}(k) = \max_{c, k'} \left\{ \log(Ak^\alpha - k') + \beta v^{(T-1)}(k') \right\}$$

puede mostrarse que, módulo una constante (los términos en  $\log A$  y  $\log(1 - \alpha\beta)$  no desaparecen, pero no afectan las decisiones):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} v^{(T)}(k) = \text{cte} + \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \alpha \sum_{t=1}^T (\alpha\beta)^{t-1} \right\} \log(k) = \text{cte} + \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \log(k)$$

## Implementación numérica (1/2): el problema se vuelve una matriz sobre la malla

Tomamos el problema de planificación social recursivo sin decisión laboral endógena:

$$v(k) = \max_{c, k'} \{ \log(c) + \beta v(k') \} \quad \text{sujeto a} \quad c + (1 + g)k' - (1 - \delta)k = ak^\alpha$$

### Pasos 1 y 2: Discretización y Mallas

**Paso 1.** Mallas de estado y control:

$$\mathcal{K} = \{k_1, \dots, k_N\}, \quad \mathcal{K}' = \{k'_1, \dots, k'_M\}$$

**Paso 2.** Matriz de consumos  $\mathcal{C}$  sobre  $\mathcal{K} \times \mathcal{K}'$ :

$$c_{ij} = ak_i^\alpha + (1 - \delta)k_i - (1 + g)k'_j$$

Matriz de utilidades  $\mathcal{U}$ :

$$u_{ij} = \begin{cases} \log(c_{ij}) & \text{si } c_{ij} > 0 \\ -\infty & \text{si } c_{ij} \leq 0 \end{cases}$$

### Paso 3: Matriz Objetivo de Bellman

Elegimos una estimación inicial  $v^{(0)}(k)$  sobre  $\mathcal{K}$  y definimos la función objetivo:

$$\tilde{v}_{ij}^{(1)} = u_{ij} + \beta v_j^{(0)}$$

donde  $v_j^{(0)} = v^{(0)}(k'_j)$ .

Para evaluar sobre la malla de controles se requiere  $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$  o bien interpolar  $v^{(0)}$  en los puntos  $k'_j$ .

## Implementación numérica (2/2): un $\max$ por fila y una norma sup bastan

### Paso 4: Operador y Criterio de Parada

Aplicamos el operador de Bellman maximizando fila por fila:

$$v_i^{(1)} = \max_j \tilde{v}_{ij}^{(1)}$$

Calculamos la distancia en norma suprema:

$$d[v^{(1)}, v^{(0)}] = \max_i |v_i^{(1)} - v_i^{(0)}|$$

- Si  $d[v^{(1)}, v^{(0)}] \leq \epsilon$ : convergencia exitosa.
- En caso contrario: actualizamos  $v^{(0)} = v^{(1)}$  y volvemos al **Paso 3**.

### Paso 5: Regla de Política Óptima

Recuperamos el argumento maximizador en la iteración convergente  $T$ :

$$k'_i = \arg \max_j \tilde{v}_{ij}^{(T)}$$

**Garantía teórica:** el teorema de contracción de Banach asegura convergencia monótona con tasa geométrica  $\beta < 1$  hacia el punto fijo único  $v^*(k)$ , sin importar la semilla  $v^{(0)}$ .

## Ejercicio: VFI numérico contra la solución exacta

---

Con  $\delta = 1$  conocemos la solución exacta (Brock–Mirman). Fijen  $\alpha = 0.33$  y  $\beta = 0.97$ :

- Comparen la  $v$  numérica con  $v(k) = \text{cte} + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \log k$
- Comparen la política numérica con  $k' = \alpha\beta A k^\alpha$
- Grafiquen el error sup-norma por iteración en escala log: una recta de pendiente  $\log \beta$  — **el teorema de la contracción en una figura**

```
import numpy as np
alpha, beta, A = 0.33, 0.97, 1.0          # delta = 1
kgrid = np.linspace(1e-3, 0.5, 500)
v = np.zeros(kgrid.size); err = []
for it in range(300):
    C = np.maximum(A*kgrid[:,None]**alpha - kgrid[None,:], 1e-12)
    v1 = (np.log(C) + beta*v[None,:]).max(axis=1)
    err.append(np.abs(v1 - v).max()); v = v1
```

*numpy puro, corre offline: es el puente hacia los notebooks de agentes heterogéneos del paquete.*

(Brock y Mirman 1972; Stokey, Lucas y Prescott 1989; Judd 1998)

## El mismo problema, sin $\max$ : la malla endógena (EGM)

---

La parte costosa de la VFI es el  $\max_j$  en cada punto de la malla y en cada iteración. El **método de la malla endógena** (Carroll 2006) lo elimina invirtiendo la ecuación de Euler:

- Fijamos la malla **sobre el control**  $k'$  y despejamos el consumo directamente de la Euler:  $(1 + g) u'(c) = \beta u'(c'(k')) [\alpha a(k')^{\alpha-1} + 1 - \delta] \implies c = u'^{-1}(\cdot)$ , sin maximizar
- La restricción de recursos entrega el estado **endógeno** compatible: los recursos de mercado  $y = ak^{\alpha} + (1 - \delta)k$  que hacen óptimo ese  $k'$  son  $y = c + (1 + g)k'$  — cada punto de la malla exógena de controles genera un punto de la malla endógena de estados
- El costo por iteración baja de una maximización por punto ( $\mathcal{O}(N_k^2 \cdot N_z)$ ) a una interpolación ( $\mathcal{O}(N_k \cdot N_z)$ ): sobre Brock–Mirman esa es la ganancia computacional. En el laboratorio usamos `puremacro.vfi.egm`.

(Carroll 2006, *Economics Letters*; Barillas y Fernández-Villaverde 2007)

# La VFI global y la aproximación local se separan lejos del estado estacionario

## Python (puremacro) — Solución VFI nativa en Python (puremacro.vfi)

```
# Brock-Mirman resuelto con la API nativa de puremacro.vfi
from puremacro.vfi import model, solve

m = model('Brock-Mirman', alpha=0.33, beta=0.97, delta=1.0)
m.add_state('k', 0.02, 0.8, 500)          # malla de capital (k* = 0.183)
m.add_shock('z', rho=0.90, sigma=0.10, n_points=5) # AR(1) de TFP discretizado
res = solve(m, tol=1e-6)                  # res.V, res.policy, res.n_iter
```

## Laboratorio de Confrontación: VFI Global vs. Perturbación Local de Klein

- **VFI Global (Python / puremacro.vfi):** Resuelve la función de valor  $v(k)$  y la regla de política  $k' = g(k)$  en todo el dominio  $\mathcal{K}$ , capturando no-linealidades globales y límites de endeudamiento sin importar la distancia al estado estacionario.
- **Aproximación Local de 1.er Orden (Klein 2000 QZ):** Expande  $g(k) \approx k_{ss} + g_k(k - k_{ss})$  alrededor del estado estacionario. Funciona con precisión cerca de  $k_{ss}$ , pero acumula errores severos en recesiones profundas o choques de cola.

## Entre lo local y lo global: regímenes por tramos y el ZLB (OccBin)

---

¿Qué hacer cuando el modelo incorpora restricciones de desigualdad como el límite inferior a la tasa nominal ( $i_t \geq 0$ )? La VFI global sufre la maldición de la dimensionalidad y la perturbación lineal estándar es ciega a la restricción.

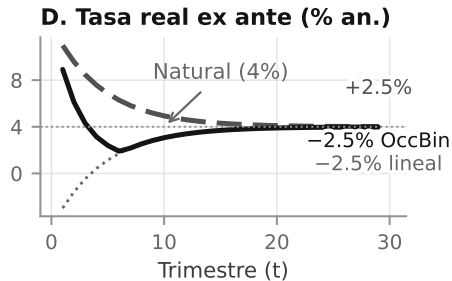
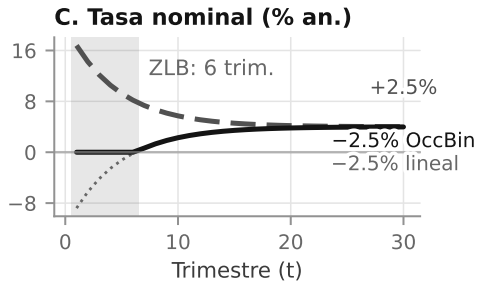
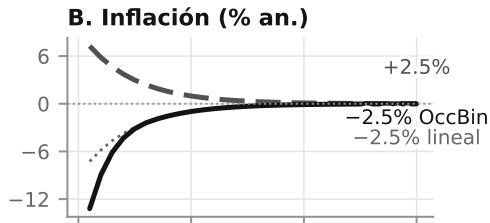
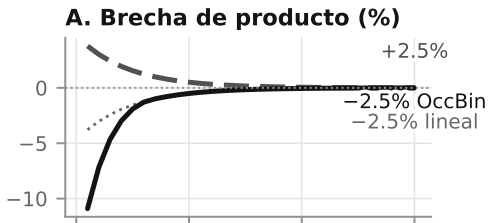
**Solución por tramos (Guerrieri e Iacoviello 2015):**

- **Régimen de referencia:** política monetaria activa siguiendo la regla de Taylor.
- **Régimen restringido:** trampa de liquidez con tasa nominal en el ZLB ( $i_t = 0$ ).
- **Asimetría macroeconómica:** un choque contractivo ( $-2.5\%$ ) vincula el ZLB; el producto cae más del doble de lo que se expande ante un choque positivo ( $+2.5\%$ ).

### Laboratorio Computacional: `puremacro.dsge.solve_occbin`

Resuelvan el régimen no lineal por tramos y cuantifiquen la amplificación del multiplicador fiscal en el laboratorio interactivo T02\_D\_occbin\_zlb\_regimes (§3-§4): la restricción multiplica el multiplicador de 1.51 a 6.84.

## La misma caída, con y sin ZLB: $-10.9\%$ contra $-3.8\%$ en impacto



Material de referencia:

- El sistema transformado completo del Paso 1 de la log-linealización
- La derivación secuencial  $\rightarrow$  recursiva del valor de la empresa
- La envolvente de la empresa y la condición de no arbitraje
- El hogar y el equilibrio recursivo cuando la empresa posee el capital
- Los objetos que Dynare deja en memoria tras resolver un `.mod`
- La simulación y graficado en Python de las trayectorias de previsión perfecta

## Apéndice: el sistema transformado del Paso 1

---

**Paso 1:** transformamos las variables endógenas en la exponencial de su logaritmo, es decir,  $C_t = e^{\log(C_t)}$

$$\gamma e^{\log(C_t^*)} - (1 - \alpha)A \left[ e^{\log(K_{t-1}^*)} \right]^\alpha \left[ e^{\log(L_t^*)} \right]^{-\alpha} \left[ N - e^{\log(L_t^*)} \right] = 0$$

(Es la  $F_1$  del cuerpo multiplicada por  $N - L_t^*$  para evitar el cociente; la log-linealización resultante no cambia.)

$$\frac{e^{\log(C_{t+1}^*)}}{\beta e^{\log(C_t^*)}} - \left\{ \alpha A \left[ e^{\log(K_t^*)} \right]^{\alpha-1} \left[ e^{\log(L_{t+1}^*)} \right]^{1-\alpha} + 1 - \delta \right\} = 0$$

$$e^{\log(C_t^*)} + e^{\log(K_t^*)} - (1 - \delta)e^{\log(K_{t-1}^*)} - A \left[ e^{\log(K_{t-1}^*)} \right]^\alpha \left[ e^{\log(L_t^*)} \right]^{1-\alpha} = 0$$

## Apéndice: del valor secuencial a la Bellman de la empresa

---

Partamos del problema de decisión secuencial de una empresa que es propietaria de cierto acervo de capital  $k$ . En variables sin tendencia, con dividendos por periodo  $d_t = ak_{t-1}^\alpha l_{dt}^{1-\alpha} + (1 - \delta)k_{t-1} - w_t l_{dt} - (1 + g)k_t$  y dividendos en niveles  $D_t = (1 + g)^{t-1} d_t$ , el valor del flujo de dividendos como función del capital inicial es

$$\begin{aligned}\Pi(k_0) &= \max_{l_{dt}, k_t} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1 + g)^{t-1} [ak_{t-1}^\alpha l_{dt}^{1-\alpha} + (1 - \delta)k_{t-1} - w_t l_{dt} - (1 + g)k_t]}{(1 + r_1) \dots (1 + r_{t-1})} = \\ &= \max_{l_{d1}, k_1} \left\{ ak_0^\alpha l_{d1}^{1-\alpha} + (1 - \delta)k_0 - w_1 l_{d1} - (1 + g)k_1 + \frac{(1 + g) \Pi(k_1)}{1 + r_1} \right\}\end{aligned}$$

lo que resulta en la ecuación de Bellman de la empresa:

$$\Pi(k; w, r) = \max_{l_d, k'} \left\{ ak^\alpha l_d^{1-\alpha} + (1 - \delta)k - w l_d - (1 + g)k' + \frac{(1 + g) \Pi(k'; w', r')}{1 + r'} \right\}$$

donde  $r'$  es la tasa entre el periodo corriente y el siguiente —la misma que paga el bono comprado hoy en el problema del hogar—, como muestra el descuento  $1 + r_1$  de la derivación secuencial.

## Apéndice: la envoltente de la empresa entrega la no arbitraje

---

Tomando condiciones de primer orden en la ecuación de Bellman de la empresa, respecto de  $l_d$ :

$$(1 - \alpha)ak^\alpha l_d^{1-\alpha} = w \iff w = (1 - \alpha)\frac{y}{l_d}$$

y respecto de  $k'$ , donde el término  $-(1 + g)k'$  compite con la continuación descontada:

$$-(1 + g) + \frac{(1 + g)}{1 + r'} \frac{\partial \Pi}{\partial k}(k'; w', r') = 0 \iff \frac{\partial \Pi}{\partial k}(k'; w', r') = 1 + r'$$

El teorema de la envoltente aplicado a la misma ecuación —derivando respecto del capital que la empresa trae dado— da

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k}(k; w, r) = \alpha ak^{\alpha-1} l_d^{1-\alpha} + 1 - \delta = q + 1 - \delta, \quad q \equiv \alpha \frac{y}{k}$$

Evaluando esta expresión un periodo más adelante y sustituyéndola en la condición de primer orden se obtiene la **condición de no arbitraje**

$$1 + r' = q' + 1 - \delta$$

es decir, el mismo rendimiento bruto del capital que exige la ecuación de Euler del hogar.

## Apéndice: el hogar y el equilibrio cuando la empresa posee el capital

---

El hogar representativo ya no acumula capital: su único activo es el bono —y la acción de la empresa— y recibe el dividendo  $d$  del periodo, distinto de  $\Pi$ , que es el valor presente de todo el flujo:

$$v(b; w, r) = \max_{l_s, c, b'} \{ \gamma \log(1 - l_s) + \log(c) + \beta v(b'; w', r') \}$$

sujeto a:

$$c + (1 + g)b' = wl_s + (1 + r)b + d$$

Con multiplicador  $\lambda = 1/c$ , la condición estática es  $\frac{\gamma c}{1 - l_s} = w$ ; la dinámica,  $(1 + g)\lambda = \beta \frac{\partial v}{\partial b}(b'; w', r')$ , y la envolvente  $\frac{\partial v}{\partial b}(b; w, r) = (1 + r)\lambda$  la convierte en la Euler de bonos  $(1 + g)\frac{c'}{\beta c} = 1 + r'$ .

Respecto de la definición de equilibrio competitivo recursivo del cuerpo, cambian tres cosas:

- El estado individual del hogar pierde  $k_s$ : sus funciones son  $v(b; w, r)$ ,  $c(b; w, r)$ ,  $l_s(b; w, r)$  y  $b'(b; w, r)$ , y el precio  $q$  desaparece de su problema
- La empresa aporta  $\Pi(k; w, r)$ ,  $k'(k; w, r)$  y  $l_d(k; w, r)$  como solución de **su** ecuación de Bellman
- Los precios  $w(K, B)$  y  $r(K, B)$  siguen siendo tales que los mercados están en equilibrio

## Apéndice: qué deja Dynare en memoria

---

Una vez que ejecutamos el archivo `.mod` con **dynare** `nombredelarchivo.mod`, se generan varios objetos y variables que contienen información sobre el modelo y su solución.

- **Simulated\_time\_series** contiene información sobre la respuesta endógena de las variables ante el cambio permanente que hemos simulado
- Esta información también está contenida en el objeto **oo\_**
- El objeto **M\_** contiene información genérica sobre el modelo

## Apéndice: graficar las trayectorias con Python y puremacro

---

Podemos simular y graficar las trayectorias de convergencia al nuevo estado estacionario —con una productividad un 2 % superior— directamente en Python:

### Python (puremacro) — Simulación y visualización con matplotlib

```
import matplotlib.pyplot as plt
from puremacro.dsge import load_mod

# Cargar el modelo y resolver la transición de previsión perfecta (200 periodos)
m = load_mod("modelos/neoclasico_prevision_perfecta.mod")
sim = m.solve_perfect_foresight(periods=200)

# Graficar la dinámica de convergencia de cada variable
fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(6.5, 3.8))
for ax, var in zip(axes.flat, ['y', 'c', 'k', 'l']):
    ax.plot(sim[var], 'k-', lw=1.5, label='Transición')
    ax.axhline(sim[var].iloc[-1], color='0.5', ls='--', label='Nuevo SS')
    ax.set_title(f'Trayectoria: ${var}$', fontsize=9)
    ax.grid(alpha=0.2)
fig.tight_layout()
```